

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

**Механіко-математичний факультет  
ННІ «Інститут геології»**

**ВИЗНАЧНИКИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ**  
(НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ МАТЕРІАЛ)

**Сірик О.Є.,  
Шовкопляс Т. В.**

**КИЇВ – 2026**

**Рекомендовано** вченою радою механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка до друку (в електронному вигляді) навчально-методичний матеріал «Визначники та їх властивості.» авторів асистента кафедри загальної математики Сірик О.В. та асистента кафедри загальної математики Шовкопляс Т. В. (протокол № 15 засідання вченої ради механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка від 15 травня 2026 року)

**рекомендовано** науково-методичною комісією механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка до друку навчально-методичний матеріал «Визначники та їх властивості» авторів О. Є. Сірик, Т. В. Шовкопляс (протокол №10 засідання науково-методичної комісії механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка від 30 квітня 2026 року)

**рекомендовано кафедрою загальної математики** механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка до розміщення на сайті механіко-математичного факультету навчально-методичний матеріал «Визначники та їх властивості» авторів О. Є. Сірик, Т. В. Шовкопляс (протокол № 14 засідання кафедри загальної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка від 29 квітня 2026 року)

**Підтримано** керівником проектної групи ОПП «Геологія та надрокористування», доктором геологічних наук, професором Володимиром Михайловичем видання зазначеного навчально-методичного матеріалу О.Є. Сірик, Т. В. Шовкопляс «Визначники та їх властивості. – Київ: КНУ ім. Тараса Шевченка, 2026. – 56 с.»

# ВИЗНАЧНИКИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

## (Методична розробка)

### ЗМІСТ

Вступ.....	4
Розділ 1. Визначники. Поняття визначника .....	6
§ 1.1. Визначник. Основні поняття.....	6
§ 1.2. Приклади обчислення визначників.....	14
Розділ 2. Властивості визначника.....	25
Розділ 3. Застосування визначників.....	34
§ 3.1. Застосування визначників у методі Крамера. ....	34
§ 3.2. Приклади застосування методу Крамера.....	39
§ 3.3. Застосування визначника у методі оберненої матриці (або матричний метод) розв’язання систем лінійних рівнянь .....	47
Завдання для самостійної роботи .....	52
ЛІТЕРАТУРА.....	56

## ВСТУП

Метою написання даної методичної розробки було формування у студентів математичного мислення, вміння застосовувати математичний базис у прикладних задачах геології, геоморфології, геофізики, теорії поля. Теорія визначників є однією з базових теорій в математичних дисциплінах. В переважній більшості напрямів науки та її прикладного застосування у відповідних галузях досліджуються та вивчаються статистичні дані, які в подальшому опрацьовуються шляхом застосування різноманітних аналітичних методів. Будь-які статистичні дані потребують упорядкування. Як правило, статистичні дані упорядковуються в таблиці, математичним форматом таблиці є матриця. Щоб можна було проаналізувати статистичні дані, упорядковані в матриці, необхідно проаналізувати матриці, базуючи аналіз на теорії матриць. Визначник є числом квадратної матриці, тому дуже важливо володіти теорією визначників. В теорії матриць за значенням визначника можна встановити, чи має матриця обернену, і якщо має, обчислити її.

Крім теорії обернених матриць, яка належить розділу лінійної алгебри навчальної дисципліни «Вища математика», теорія визначників також застосовується в розділі векторної алгебри навчальної дисципліни «Вища математика». Формула обчислення векторного добутку є визначником, площу паралелограма та трикутника також можна обчислити за допомогою визначника. Структура формули, за якою можна обчислити мішаний добуток,

також базується на теорії визначників. Формули об'ємів паралелепіпеда, призм також базуються на визначниках. Крім того, визначники застосовуються в теорії поля.

Навчально-методичні матеріали «Визначники та їх властивості» складаються з кількох розділів. В першому розділі наведені означення визначника та основні поняття та твердження, пов'язані з теорією визначників, також наведені приклади визначників. В другому розділі наведено властивості визначника, в третьому розділі показано застосування теорії визначників у методі Крамера, при знаходженні оберненої матриці та методі оберненої матриці (матричному методі) розв'язання систем лінійних рівнянь. Також наведені завдання з теорії визначників для самостійної роботи.

Теорія визначників вивчається в розділі лінійної алгебри і є складовою навчальної дисципліни «Вища математика», яку викладають студентам галузі знань Е Природничі науки, спеціальності Е4 Науки про Землю, освітнього рівня Бакалавр, освітньої програми Геологія та надрокористування.





**Означення 1.1.** **Визначником** квадратної  $m \times m$ -вимірної матриці  $A$  вигляду (1.1.7) називається число

$$d = a_{11}d_1 - a_{12}d_2 + a_{13}d_3 - \dots + (-1)^{m+1} a_{1m}d_m, \quad (1.1.9)$$

в (1.1.9) за  $d_k, 1 \leq k \leq m-1$ , позначено визначник  $(m-1) \times (m-1)$ -вимірної квадратної матриці:

$$\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(k-1)} & a_{2(k+1)} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3(k-1)} & a_{3(k+1)} & \dots & a_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m(k-1)} & a_{m(k+1)} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad (1.1.10)$$

матриця вигляду (1.1.10) утворюється з квадратної матриці  $A$  вигляду (1.1.7) внаслідок викреслення в матриці  $A$  першого рядка й  $k$ -го стовпця.

$a_{ik}, 1 \leq i, k \leq m$ , – елементи визначника.

**Зауваження 1.1.** Рівність (1.1.9) є формулою обчислення визначника квадратної матриці. Формула (1.1.9) є формулою обчислення визначника шляхом *розкладу визначника за першим рядком*.

Поняття визначника виникло з необхідністю виведення формул, які давали б змогу знаходити розв'язки систем лінійних рівнянь.

**Позначення 1.1. Позначення визначника.** Зауважимо, що визначники квадратної матриці  $A$  вигляду (1.1.7) позначають символами:

$$\det A, |A|, \left| a_{ij} \right|_1^m, \quad (1.1.11)$$

або

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}. \quad (1.1.12)$$

Позначення (1.1.12) застосовується тоді, коли матриця  $A$  виписана в явному вигляді.

Тобто, якщо мова йде про визначник матриці  $A$ , то також має місце рівність:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}. \quad (1.1.13)$$

Зауважимо, що елементами визначника можуть бути довільні числа, букви, функції, числові вирази, буквенні вирази, функціональні вирази, буквенно-числові вирази, буквенно-функціональні вирази.

**Означення 1.2.** *Порядком* визначника називається кількість його рядків або стовпчиків.

Наприклад, визначник (1.1.13) має порядок  $m$ , або, ще кажуть, що визначник (1.1.13)  $m$ -го порядку.

**Зауваження 1.2.** При  $m=4$  з формули (1.1.13) маємо визначник четвертого порядку ( $4 \times 4$ )-вимірної матриці  $A$  вигляду (1.1.7), записаний в загальному вигляді:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}. \quad (1.1.14)$$

При  $m=3$  з формули (1.1.13) маємо визначник третього порядку ( $3 \times 3$ )-вимірної матриці  $A$  вигляду (1.1.7), записаний в загальному вигляді:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (1.1.15)$$

При  $m=2$  з формули (1.1.13) маємо визначник другого порядку ( $2 \times 2$ )-вимірної матриці  $A$  вигляду (1.1.7), записаний в загальному вигляді:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad (1.1.16)$$

При  $m=1$  з формули (1.1.13) маємо визначник першого порядку  $(1 \times 1)$ -вимірної матриці  $A$  вигляду (1.1.7), записаний в загальному вигляді:

$$\det A = |a_{11}|. \quad (1.1.17)$$

Так, варто зауважити, що визначник першого порядку складається лише з одного числа і записується в прямих рисках, стандартно, як записується визначник, але, запис (1.1.17) визначника першого порядку нагадує модуль числа  $a_{11}$ , але у випадку обчислення та запису визначника першого порядку застосовується і є вірним запис (1.1.17).

### Приклад 1.1. Приклади визначників.

1) Наведемо приклади визначників першого порядку, такі визначники відповідають визначнику першого порядку, записаному у загальному вигляді (1.14) або визначнику  $m$ -го порядку, загального вигляду (1.1.13) при  $m=1$ :  $\det A = |6|$ , - це визначник першого порядку  $(1 \times 1)$ -вимірної матриці  $A = (6)$ . Розглядуваний визначник складається з одного елемента, який є числом,  $a_{11} = 6$ . Також при  $m=1$  можливий випадок визначника:

$\det A = \left| \frac{1}{7} \right|$ , - це визначник першого порядку  $(1 \times 1)$ -вимірної матриці

$A = \left( \frac{1}{7} \right)$ . Розглядуваний визначник складається з одного елемента, який є

дробовим числом,  $a_{11} = \frac{1}{7}$ .

У випадку  $\det A = |\cos x|$  такий визначник відповідає  $(1 \times 1)$ -вимірній матриці  $A = (\cos x)$ , яка складається з одного елемента, який є функцією, тобто,  $a_{11} = \cos x$ .

$\det A = |bc^2 - 4b + abc|$  – це приклад визначника матриці розмірності  $(1 \times 1)$ :  
 $A = (bc^2 - 4b + abc)$ , у цієї матриці її єдиний елемент  $a_{11} = bc^2 - 4b + abc$  є буквенним виразом.

$$2) \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

3)  $(1 \times 1)$ -вимірної матриці При  $m = 4$  з формули (1.1.13) маємо визначник четвертого порядку  $(4 \times 4)$ -вимірної матриці  $A$  вигляду (1.1.7), записаний в загальному вигляді:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}. \quad (1.1.18)$$

При  $m = 3$  з формули (1.1.13) маємо визначник третього порядку  $(3 \times 3)$ -вимірної матриці  $A$  вигляду (1.1.7), записаний в загальному вигляді:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (1.1.19)$$

При  $m = 2$  з формули (1.1.13) маємо визначник другого порядку  $(2 \times 2)$ -вимірної матриці  $A$  вигляду (1.1.7), записаний в загальному вигляді:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad (1.1.20)$$

При  $m = 1$  з формули (1.1.13) маємо визначник першого порядку  $(1 \times 1)$ -вимірної матриці  $A$  вигляду (1.1.7), записаний в загальному вигляді:

$$\det A = |a_{11}|. \quad (1.1.21)$$

**Означення 1.3.** **Мінором** елемента  $a_{ik}$ ,  $1 \leq i, k \leq m$ , квадратної  $m \times m$ -вимірної матриці  $A$  вигляду (1.7) називається визначник квадратної  $(m-1) \times (m-1)$ -вимірної матриці, отриманої після викреслення з  $m \times m$ -вимірної матриці  $A$   $i$ -го рядка та  $k$ -го стовпчика

Такий міnor ще називають **мінором матриці  $A$ , що відповідає елементу  $a_{ik}$** ,  $1 \leq i, k \leq m$ , або мінором елемента  $a_{ik}$ ,  $1 \leq i, k \leq m$ , у визначнику  $\det A$ .

**Позначення 1.2.** Позначення **мінора елемента  $a_{ik}$** ,  $1 \leq i, k \leq m$ , матриці  $A$ .

Міnor елемента  $a_{ik}$ ,  $1 \leq i, k \leq m$ , матриці  $A$  позначається символом  $M_{ik}$ ,  $1 \leq i, k \leq m$ , або  $|A_i^k|$ ,  $1 \leq i, k \leq m$ .

Таким чином,

$$M_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(k-1)} & a_{1(k+1)} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(k-1)} & a_{2(k+1)} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \dots & a_{(i-1)(k-1)} & a_{(i-1)(k+1)} & \dots & a_{(i-1)m} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \dots & a_{(i+1)(k-1)} & a_{(i+1)(k+1)} & \dots & a_{(i+1)m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m(k-1)} & a_{m(k+1)} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}, \quad (1.1.22)$$

Зважаючи на позначення мінора (1.1.14), формулу обчислення визначника (1.1.9) можна записати таким чином:

$$d = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} - \dots + (-1)^{m+1} a_{1m}M_{1m}. \quad (1.1.23)$$

Зауважимо, що визначник (1.1.13) квадратної матриці  $A$  вигляду (1.1.3) можна обчислювати не лише за формулою (1.1.9), або відповідною їй формулою (1.1.23), які є **формулами розкладу визначника за першим рядком**, а і за формулами розкладу визначника за довільним рядком чи за довільним стовпцем:

$$d = a_{i_1} \cdot (-1)^{i+1} \cdot M_{i_1} + a_{i_2} \cdot (-1)^{i+2} \cdot M_{i_2} + a_{i_3} \cdot (-1)^{i+3} \cdot M_{i_3} + \dots$$

$$\dots + a_{i_m} \cdot (-1)^{i+m} \cdot M_{i_m}, \quad (1.1.24)$$

$$d = a_{1k} \cdot (-1)^{1+k} \cdot M_{1k} + a_{2k} \cdot (-1)^{2+k} \cdot M_{2k} + a_{3k} \cdot (-1)^{3+k} \cdot M_{3k} + \dots$$

$$\dots + a_{mk} \cdot (-1)^{m+k} \cdot M_{mk}. \quad (1.1.25)$$

(1.1.24) – це формула *розкладу визначника  $m$ -го порядку за  $i$ -м рядком*,  
(1.1.25) – це формула *розкладу визначника  $m$ -го порядку за  $k$ -м стовпчиком*.

**Означення 1.4.** Алгебраїчним доповненням елемента  $a_{ik}$ ,  $1 \leq i, k \leq m$ , визначника  $m$ -го порядку  $\det A$  вигляду (1.1.13)  $m \times m$ -вимірної матриці  $A$  вигляду (1.1.7) називається число

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}, \quad 1 \leq i, k \leq m. \quad (1.1.26)$$

**Позначення 1.3.** З означення алгебраїчного доповнення елемента  $a_{ik}$ ,  $1 \leq i, k \leq m$ , визначника  $m$ -го порядку  $\det A$  зрозуміло, що алгебраїчне доповнення елемента  $a_{ik}$ ,  $1 \leq i, k \leq m$ , позначається символом  $A_{ik}$ ,  $1 \leq i, k \leq m$ .

Зважаючи на рівність (1.1.22), алгебраїчне доповнення  $A_{ik}$ ,  $1 \leq i, k \leq m$ , вигляду (1.1.26) можна записати таким чином:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(k-1)} & a_{1(k+1)} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(k-1)} & a_{2(k+1)} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \dots & a_{(i-1)(k-1)} & a_{(i-1)(k+1)} & \dots & a_{(i-1)m} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \dots & a_{(i+1)(k-1)} & a_{(i+1)(k+1)} & \dots & a_{(i+1)m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m(k-1)} & a_{m(k+1)} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}, \quad (1.1.27)$$

$$1 \leq i, k \leq m.$$

Зауважимо, що формули (1.1.26) та (1.1.27) мають однаковий зміст.

У визначника рядки і стовпчики рівноправні, тому, не залежно від того, за яким рядком чи стовпчиком проводити розклад визначника, щоб обчислити його, буде отримано однакову величину.

### § 1.2. Приклади обчислення визначників

Обчислимо визначники першого порядку, в загальному вигляді такі визначники записуються у вигляді формули (1.1.21).

**Приклад 1.2.1.** Обчислити визначники:

$$1) |4|; \quad 2) |0|; \quad 3) |100|; \quad 4) \left| \frac{7}{11} \right|; \quad 5) |34|; \quad 6) \left| \frac{\pi}{4} \right|; \quad 7) |\log_{13} x|;$$

$$8) \left| \operatorname{tg} \frac{3}{4} \pi \right|; \quad 9) \left| \sqrt[3]{1104} \right|; \quad 10) |2|; \quad 11) |-2|.$$

Розв'язання.

$$1) |4|=4; \quad 2) |0|=0; \quad 3) |100|=100; \quad 4) \left| \frac{7}{11} \right| = \frac{7}{11}; \quad 5) |34|=34; \quad 6)$$

$$\left| \frac{\pi}{4} \right| = \frac{\pi}{4}; \quad 7) |\log_{13} x| = \log_{13} x; \quad 8) \left| \operatorname{tg} \frac{3}{4} \pi \right| = \operatorname{tg} \frac{3}{4} \pi; \quad 9) \left| \sqrt[3]{1104} \right| = \sqrt[3]{1104};$$

$$10) |2|=2; \quad 11) |-2|=-2..$$

В прикладі 1.2.1. обчислено визначники першого порядку, тобто, які складаються з одного рядка та одного стовпця, тобто, з одного елемента, тобто значення таких визначників дорівнюють елементу, з якого вони складаються, і, відповідно, єдиний елемент визначника першого порядку не має мінору та алгебраїчного доповнення, які йому відповідають.

Розглянемо визначники другого порядку і зазначимо мінори та алгебраїчні доповнення їх елементів.

**Приклад 1.2.2.** Задано визначники:

$$1) \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} \frac{7}{13} & \frac{11}{16} \\ 4 & \frac{3}{7} \end{vmatrix}.$$

1. Для кожного елемента заданих визначників:

а) вказати мінори;

б) вказати алгебраїчні доповнення.

2. Обчислити значення визначників.

Розв'язання.

1) визначник  $\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$  складається з елементів:  $a_{11} = 4,$

$$a_{12} = -4, \quad a_{21} = 2, \quad a_{22} = 0.$$

а) згідно означення 1.3, щоб отримати мінор елемента, потрібно викреслити рядок та стовпчик, у якому знаходиться елемент і те, що буде отримано після викреслення, утворить мінор. Отже, щоб отримати мінор до елемента  $a_{11} = 4,$  потрібно викреслити перший рядок і перший стовпчик

визначника  $\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix};$  після викреслення першого рядка та першого стовпчика,

отримаємо елемент 0, який буде мінором елемента  $a_{11} = 4,$  тобто,  $M_{11} = 0.$

Тепер, проводячи аналогічні міркування, отримаємо мінор елемента  $a_{12} = -4.$  Елемент  $a_{12} = -4,$  розташований у першому рядку та другому стовпчику, тому, щоб отримати його мінор, потрібно викреслити перший рядок і другий стовпчик квадратної матриці, в якій розташований розглядуваний елемент  $a_{12} = -4,$  чи виконати ті самі дії з визначником, що їй відповідає. Отже, виконавши зазначені дії, отримаємо мінор елемента  $a_{12} = -4.$  це  $M_{12} = 2.$

Міркуючи так само, тобто, викресливши другий рядок і перший стовпчик, отримаємо мінор елемента  $a_{21} = 2,$  це  $M_{21} = -4.$

Залишилося знайти мінор елемента  $a_{22} = 0$ , тобто,  $M_{22} = 4$ , який отримано після викреслення другого рядка і стовпчика визначника.

б) тепер вкажемо алгебраїчні доповнення елементів розглядуваного визначника. За означенням 1.4. алгебраїчні доповнення елементів визначника обчислюються за формулою (1.1.26). Застосовуючи формулу (1.1.26), знайдемо алгебраїчне доповнення елемента  $a_{11} = 4$ . В цьому випадку

$i = 1, k = 1$ , та  $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}$ . Оскільки значення  $M_{11}$  знайдено раніше, то підставимо його та отримаємо:  $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 0 = 0$ . Застосовуючи формулу (1.1.26) при  $i = 1, k = 2$ , знайдемо алгебраїчне доповнення елемента

$a_{12} = -4$ :  $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12}$ , і, підставивши отримане раніше значення  $M_{12}$ , маємо:  $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = (-1)^3 \cdot 2 = -1 \cdot 2 = -2$ , тобто, провівши обчислення,

отримали, що  $A_{12} = -2$ . Для елемента  $a_{21} = 2$  маємо:  $i = 2, k = 1$ , тобто, за формулою (1.1.26) алгебраїчне доповнення елемента  $a_{21} = 2$  обчислюється за

формулою  $A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21}$ , отже, знаючи, що  $M_{21} = -4$ , маємо, що  $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-4) = (-1)^3 \cdot (-4) = 4$ . Залишилося обчислити алгебраїчне

доповнення елемента  $a_{22} = 0$ . В цьому випадку формула (1.1.26) при

$i = 2, k = 2$ , є такою:  $A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22}$ , і, знаючи, що  $M_{22} = 4$ , маємо:  $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 4 = 4$ .

2. Обчислимо значення визначника  $\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ . Застосуємо формулу (1.1.24),

яка є формулою розкладу визначника  $m$ -го порядку за  $i$ -м рядком, оскільки розглядуваний визначник є визначником другого порядку, то в даному випадку  $m = 2$ , і формула (1.1.24) має вигляд

$$d = a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} \cdot M_{i1} + a_{i2} \cdot (-1)^{i+2} \cdot M_{i2}, \quad 1 \leq i \leq 2. \quad (1.2.1)$$

У випадку, коли  $i=1$ , тобто, у випадку, коли розклад визначника відбувається за першим рядком, формула (1.2.1) набуде вигляду

$$d = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot M_{12}, \quad (1.2.2)$$

при  $i=2$  розклад визначника відбувається за другим рядком і в цьому випадку формула (1.2.1) є такою:

$$d = a_{21} \cdot (-1)^{2+1} \cdot M_{21} + a_{22} \cdot (-1)^{2+2} \cdot M_{22}. \quad (1.2.3)$$

Обчислимо значення визначника  $\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$  двома способами, спочатку

обчислимо його значення, зробивши його розклад за першим рядком, застосувавши формулу (1.2.2):

$$\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 0 + (-4) \cdot (-1)^{1+2} \cdot 2 = 0 + (-4) \cdot (-1)^3 \cdot 2 = -4 \cdot (-1) \cdot 2 = 8.$$

Отже, при обчисленні розглядуваного визначника шляхом розкладу за першим рядком, отримали його значення 8.

Тепер обчислимо визначник, розклавши його за другим рядком, тобто, застосувавши формулу (1.2.3):

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} &= 2 \cdot (-1)^{2+1} \cdot (-4) + 0 \cdot (-1)^{2+2} \cdot 4 = 2 \cdot (-1)^3 \cdot (-4) + 0 \cdot (-1)^4 \cdot 4 = \\ &= 2 \cdot (-1)^3 \cdot (-4) + 0 \cdot (-1)^4 \cdot 4 = 2 \cdot (-1) \cdot (-4) + 0 \cdot 1 \cdot 4 = 8 + 0 = 8. \end{aligned}$$

Як бачимо, обчислюючи визначник шляхом розкладу за другим рядком, і не зробивши в обчисленнях помилки, отримали також 8.

$$2) \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

У розглядуваного визначника  $a_{11} = \cos \alpha$ ,  $a_{12} = \sin \alpha$ ,  $a_{21} = 1$ ,  $a_{22} = -1$ .

а) проводячи міркування, аналогічні, як і в попередньому прикладі, застосовуючи означення 1.3, отримаємо мінори відповідних елементів розглядуваного визначника:

елементу  $a_{11} = \cos \alpha$  відповідає мінор  $M_{11} = -1$ ;

елементу  $a_{12} = \sin \alpha$  відповідає мінор  $M_{12} = 1$ ;

елементу  $a_{21} = 1$  відповідає мінор  $M_{21} = \sin \alpha$ ;

елементу  $a_{22} = -1$  відповідає мінор  $M_{22} = \cos \alpha$ .

б) проводячи міркування, аналогічні попередньому прикладу, застосовуючи означення 1.4 та формулу (1.1.26), знайдемо до елементів розглядуваного визначника їх алгебраїчні доповнення. За означенням 1.4. алгебраїчні доповнення елементів визначника обчислюються за формулою (1.1.26).

Алгебраїчним доповненням до елемента  $a_{11} = \cos \alpha$  є величина  $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-1) = -1$ ;

Алгебраїчним доповненням до елемента  $a_{12} = \sin \alpha$  є величина  $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 1 = -1$ ;

Алгебраїчним доповненням до елемента  $a_{21} = 1$  є величина  $A_{21} = (-1)^{2+1} \sin \alpha = -\sin \alpha$ ;

Алгебраїчним доповненням до елемента  $a_{22} = -1$  є величина  $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \cos \alpha = \cos \alpha$ .

2. Обчислимо значення визначника  $\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ . Спочатку обчислимо визначник за формулою (1.2.2), тобто, виконавши розклад визначника за першим рядком:

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \cos \alpha \cdot (-1)^{1+1} \cdot (-1) + \sin \alpha \cdot (-1)^{1+2} \cdot 1 = -\cos \alpha - \sin \alpha.$$

Тепер за формулою (1.2.3) обчислимо визначник, розклавши його за другим рядком:

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \sin \alpha + (-1) \cdot (-1)^{2+2} \cdot \cos \alpha = -\sin \alpha - \cos \alpha .$$

Як бачимо, при обчисленні визначника обома способами: розкладом визначника за першим рядком і розкладом визначника за другим рядком, помилок в обчисленнях не було допущено і в обох випадках отримано однакові відповіді.

3) Проаналізуємо визначник  $\begin{vmatrix} \frac{7}{13} & \frac{11}{16} \\ 4 & \frac{3}{7} \end{vmatrix}$ . Запишемо його елементи:

$$a_{11} = \frac{7}{13}, \quad a_{12} = \frac{11}{16}, \quad a_{21} = 4, \quad a_{22} = \frac{3}{7}.$$

1. а) провівши міркування, що базуються на означенні мінора, тобто, на означенні 1.3, та аналогічні міркуванням в попередніх двох прикладах. вкажемо мінори для кожного елемента заданого визначника:

$$\text{мінором елемента } a_{11} = \frac{7}{13} \text{ є величина } M_{11} = \frac{3}{7};$$

$$\text{мінором елемента } a_{12} = \frac{11}{16} \text{ є величина } M_{12} = 4;$$

$$\text{мінором елемента } a_{21} = 4 \text{ є величина } M_{21} = \frac{11}{16};$$

$$\text{мінором елемента } a_{22} = \frac{3}{7} \text{ є величина } M_{22} = \frac{7}{13}.$$

1.б) міркуючи так само, як і в попередніх прикладах, застосовуючи означення 1.4 та формулу (1.1.26), запишемо та обчислимо алгебраїчні доповнення елементів розглядуваного визначника.

Алгебраїчним доповненням до елемента  $a_{11} = \frac{7}{13}$  є величина

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{7};$$

Алгебраїчним доповненням до елемента  $a_{12} = \frac{11}{16}$  є величина

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 4 = -4;$$

Алгебраїчним доповненням до елемента  $a_{21} = 4$  є величина

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \frac{11}{16} = -\frac{11}{16};$$

Алгебраїчним доповненням до елемента  $a_{22} = \frac{3}{7}$  є величина

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \frac{7}{13} = \frac{7}{13}.$$

2. Обчислимо значення визначника  $\begin{vmatrix} \frac{7}{13} & \frac{11}{16} \\ 4 & \frac{3}{7} \end{vmatrix}$ , виконавши його розклад за

першим рядком, тобто, застосувавши формулу (1.2.2):

$$\begin{vmatrix} \frac{7}{13} & \frac{11}{16} \\ 4 & \frac{3}{7} \end{vmatrix} = \frac{7}{13} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \frac{3}{7} + \frac{11}{16} \cdot (-1)^{1+2} \cdot 4 = \frac{3}{13} - \frac{11}{4} = \frac{12-143}{52} = -\frac{131}{52}.$$

Тепер обчислимо визначник, розклавши його за другим рядком, тобто, застосувавши формулу (1.2.3):

$$\begin{vmatrix} \frac{7}{13} & \frac{11}{16} \\ 4 & \frac{3}{7} \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \frac{11}{16} + \frac{3}{7} \cdot (-1)^{2+2} \cdot \frac{7}{13} = -\frac{11}{4} + \frac{3}{13} = \frac{-143+12}{52} = -\frac{131}{52}.$$

Як бачимо, при обчисленні визначника обома способами: розкладом визначника за першим рядком і розкладом визначника за другим рядком, помилок в обчисленнях не було допущено і в обох випадках отримано однакові відповіді.

Обчислимо також розглядуваний визначник шляхом його розкладу за стовпчиками, в цьому випадку потрібно застосувати формулу розкладу визначника  $m$ -го порядку за  $k$ -м стовпчиком, тобто формулу (1.1.25). Розглядуваний визначник складається з двох стовпчиків, тобто, в даному випадку формула (1.1.25) розглядається при  $m = 2$  та  $k = 1, 2$ .

При  $m = 2$  формула (1.1.25) є формулою розкладу визначника другого порядку за  $k$ -м стовпчиком,  $k = 1, 2$ , і має вигляд:

$$d = a_{1k} \cdot (-1)^{1+k} \cdot M_{1k} + a_{2k} \cdot (-1)^{2+k} \cdot M_{2k}, \quad k = 1, 2. \quad (1.2.4)$$

Якщо  $k = 1$ , то формула (1.2.4) має вигляд:

$$d = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11} + a_{21} \cdot (-1)^{2+1} \cdot M_{21}. \quad (1.2.5)$$

Формула (1.2.4) є формулою розкладу визначника другого порядку за першим стовпчиком. Ця формула є частковим випадком формули (1.2.4) та загальної формули (1.1.25) розкладу визначника за стовпчиком.

Якщо  $k = 2$ , то формула (1.2.4) має вигляд:

$$d = a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot M_{12} + a_{22} \cdot (-1)^{2+2} \cdot M_{22}, \quad (1.2.6)$$

і є формулою розкладу визначника другого порядку за другим стовпчиком.

Застосуємо формули (1.2.5) та (1.2.6) до обчислення розглядуваного визначника. Спочатку обчислимо визначник другого порядку, зробивши його розклад за першим стовпчиком, тобто, за застосувавши при розкладі формулу (1.2.5):

$$\begin{vmatrix} 7 & 11 \\ 13 & 16 \\ 4 & \frac{3}{7} \end{vmatrix} = \frac{7}{13} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \frac{3}{7} + 4 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \frac{11}{16} = \frac{3}{13} - \frac{11}{4} = \frac{12-143}{52} = -\frac{131}{52}.$$

Тепер обчислимо розглядуваний визначник другого порядку, зробивши його розклад за другим стовпчиком, тобто, за застосувавши при розкладі формулу (1.2.6):

$$\begin{vmatrix} 7 & 11 \\ 13 & 16 \\ 4 & 3 \\ & 7 \end{vmatrix} = \frac{11}{16} \cdot (-1)^{1+2} \cdot 4 + \frac{3}{7} \cdot (-1)^{2+2} \cdot \frac{7}{13} = -\frac{11}{4} + \frac{3}{13} = \frac{-143+12}{52} = -\frac{131}{52}.$$

Визначник другого порядку  $\begin{vmatrix} 7 & 11 \\ 13 & 16 \\ 4 & 3 \\ & 7 \end{vmatrix}$  обчислено чотирма способами,

тобто, шляхом розкладу розглядуваного визначника за першим і другим рядками та першим і другим стовпчиками, і у всіх випадках в результаті обчислення визначника було отримано те саме число, що підтверджує, не залежно від того, яким чином обчислювати значення визначника, значення визначника при цьому не зміниться.

**Приклад 1.2.3.** Задано визначник:  $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 9 & 5 & -8 \end{vmatrix}$ . Знайти:

1. а) мінори кожного елемента заданого визначника;
- б) алгебраїчні доповнення кожного елемента заданого визначника.

Розв'язання.

1) визначник  $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 9 & 5 & -8 \end{vmatrix}$  складається з елементів:  $a_{11} = 1$ ,  $a_{12} = 3$ ,

$$a_{13} = -2, a_{21} = 3, a_{22} = -2, a_{23} = -1, a_{31} = 9, a_{32} = 5, a_{33} = -8.$$

а) Знайдемо мінори елементів визначника. Застосуємо означення 1.3. За означенням 1.3, щоб отримати мінор елемента  $a_{11} = 1$ , потрібно викреслити рядок і стовпчик, в якому розташований цей елемент, тобто, перший рядок і

перший стовпчик, і ті елементи, що залишаться, утворюватимуть мінор

елемента  $a_{11} = 1$ , тобто,  $M_{11} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 5 & -8 \end{vmatrix}$ ;

мінор елемента  $a_{12} = 3$  буде отримано з елементів визначника, що залишилися після викреслення першого рядка і другого стовпчика

визначника:  $M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -8 \end{vmatrix}$ ;

викресливши у визначнику перший рядок і третій стовпчик, буде отримано

мінор елемента  $a_{13} = -2$ :  $M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}$ ;

викреслюючи другий рядок і перший стовпчик з визначника, отримаємо

мінор елемента  $a_{21} = 3$ :  $M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -8 \end{vmatrix}$ ;

мінор елемента  $a_{22} = -2$  буде отримано після викреслення другого рядка та

другого стовпчика визначника:  $M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 9 & -8 \end{vmatrix}$ ;

аналогічно отримуємо мінор елемента  $a_{23} = -1$  викресливши другий рядок і

третьій стовпчик визначника:  $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}$ ;

залишилося записати мінори елементів третього рядка, проведемо аналогічні міркування: викресливши третій рядок та перший стовпчик

визначника, отримаємо мінор елемента  $a_{31} = 9$ :  $M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$ ;

викреслюючи третій рядок і другий стовпчик у визначнику, отримаємо

мінор елемента  $a_{32} = 5$  визначника:  $M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ ; і мінор елемента  $a_{33} = -8$

буде отримано після викреслення третього рядка і третього стовпчика

визначника:  $M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$ .

1. б) запишемо алгебраїчні доповнення кожного елемента заданого визначника, застосуємо формулу (1.1.26) означення 1.4, алгебраїчним доповненням елемента  $a_{11} = 1$  буде величина  $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 5 & -8 \end{vmatrix}$ , в цьому випадку формула (1.1.26) розглядається при  $i = 1, k = 1$ , та має вигляд:  $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}$ .

Так само міркуючи, застосовуючи формулу (1.1.26) означення 1.4, отримаємо алгебраїчні доповнення решти елементів визначника: алгебраїчним доповненням елемента  $a_{12} = 3$  є величина  $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -8 \end{vmatrix}$ , в цьому випадку  $i = 1, k = 2$ , і формула (1.1.26) є такою:  $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12}$ ;

до елемента  $a_{13} = -2$  алгебраїчне доповнення має вигляд:  $A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}$ ;

до елемента  $a_{21} = 3$  отримаємо алгебраїчне доповнення:  $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -8 \end{vmatrix}$ , отримана з формули (1.1.26) при  $i = 2, k = 1$ ,

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21};$$

алгебраїчним доповненням елемента  $a_{22} = -2$  буде величина:

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 9 & -8 \end{vmatrix};$$

алгебраїчним доповненням елемента  $a_{23} = -1$  є число:  $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}$ ;

алгебраїчні доповнення елементів третього рядка є такими: алгебраїчне доповнення до елемента  $a_{31} = 9$  має вигляд:  $A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$ ;

алгебраїчне доповнення елемента  $a_{32} = 5$  :  $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ ;

алгебраїчне доповнення елемента  $a_{33} = -8$  має вигляд:  $A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$ .

## Розділ 2. Властивості визначника

Визначники  $m$ -го порядку застосовуються в теоретичних дослідженнях і при розв'язуванні задач практичного змісту, тому важливо знати властивості визначників і вміти їх застосовувати.

**Властивість 1.** Визначник не змінюється при транспонуванні.

Тобто, у випадку  $(m \times m)$ -вимірної матриці  $A$  вигляду (1.1.7) її визначник  $m$ -го порядку  $\det A$  вигляду (1.1.13) задовольняє рівність

$$\det A = (\det A)^T \quad (2.1)$$

тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}, \quad (2.2)$$

Зрозуміло, що в рівності (2.2)

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}, \quad (2.3)$$

$$(\det A)^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}. \quad (2.4)$$

Нагадаємо означення транспонованої матриці.

**Означення 2.1.** Транспонованою матрицею до  $m \times n$ -вимірної прямокутної матриці  $A$  вигляду (1.1.3) є матриця, у якій стовпці є рядками матриці  $A$ :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

**Позначення 2.1.** Транспонована матриця до до  $m \times n$ - вимірної прямокутної матриці  $A$  вигляду (1.1.3) позначається  $A^T$ . Також застосовується позначення транспонованої матриці  $A^t$ .

**Властивість 2.** Якщо який небудь з рядків визначника складається з нулів, то визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{(i+2)1} & a_{(i+2)2} & \dots & a_{(i+2)m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.5)$$

**Властивість 3.** Якщо у визначнику поміняти місцями будь-які два рядки, то абсолютна величина визначника не зміниться, а знак його зміниться на протилежний:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sm} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sm} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}, \quad (2.6)$$

тобто, в рівності (2.6) в правій частині зазначено визначник, в якому  $k$ -й і  $s$ -тий рядок містяться, тому такий змінений визначник дорівнює початковому зі знаком мінус.

**Властивість 4.** Визначник, в якому є два однакові рядки, дорівнює нулю.

Тобто, дана властивість через визначник записується таким чином:

$$\begin{array}{l}
 k\text{-й рядок} \\
 s\text{-й рядок}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{cccc}
 a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots & a_{1m} \\
 a_{21} & a_{22} & \dots\dots\dots & a_{2m} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 b_1 & b_2 & \dots\dots\dots & b_m \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 b_1 & b_2 & \dots\dots\dots & b_m \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots\dots & a_{mm}
 \end{array} \right| = 0, \quad (2.7)$$

У визначника з рівності (2.7)  $k$ -й та  $s$ -й рядки мають однакові елементи.

Визначник у лівій частині рівності (2.7) позначимо через  $\det A$ , тобто

$$\det A = \left| \begin{array}{cccc}
 a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots & a_{1m} \\
 a_{21} & a_{22} & \dots\dots\dots & a_{2m} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 b_1 & b_2 & \dots\dots\dots & b_m \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 b_1 & b_2 & \dots\dots\dots & b_m \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots\dots & a_{mm}
 \end{array} \right|, \quad (2.8)$$

але, якщо у визначнику (2.8) поміняти місцями  $k$ -й та  $s$ -й рядки, то зовні ми отримаємо такий самий визначник, але згідно властивості 3 у визначнику зміниться знак на протилежний:

$$\begin{array}{l}
 k\text{-й рядок} \\
 s\text{-й рядок}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{cccc}
 a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots & a_{1m} \\
 a_{21} & a_{22} & \dots\dots\dots & a_{2m} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 b_1 & b_2 & \dots\dots\dots & b_m \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 b_1 & b_2 & \dots\dots\dots & b_m \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots\dots & a_{mm}
 \end{array} \right| = - \left| \begin{array}{cccc}
 a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots & a_{1m} \\
 a_{21} & a_{22} & \dots\dots\dots & a_{2m} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 b_1 & b_2 & \dots\dots\dots & b_m \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 b_1 & b_2 & \dots\dots\dots & b_m \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots\dots & a_{mm}
 \end{array} \right| \begin{array}{l}
 s\text{-й рядок} \\
 k\text{-й рядок}
 \end{array}, \quad (2.9)$$

Оскільки переставлені місцями  $k$ -й і  $s$ -й рядки мають однакові елементи, що знаходяться на відповідних місцях, то початковий визначник і визначник, отриманий з початкового визначника в результаті заміни місцями відповідних елементів  $k$ -го і  $s$ -го рядків однакові, то і значення цих визначників однакові, тобто визначники

$$\begin{array}{l}
 k\text{-й рядок} \\
 s\text{-й рядок}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{cccc}
 a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots & a_{1m} \\
 a_{21} & a_{22} & \dots\dots\dots & a_{2m} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 b_1 & b_2 & \dots\dots\dots & b_m \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 b_1 & b_2 & \dots\dots\dots & b_m \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots & a_{mm}
 \end{array} \right| \quad (2.10)$$

та

$$\left| \begin{array}{cccc}
 a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots & a_{1m} \\
 a_{21} & a_{22} & \dots\dots\dots & a_{2m} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 b_1 & b_2 & \dots\dots\dots & b_m \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 b_1 & b_2 & \dots\dots\dots & b_m \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots & a_{mm}
 \end{array} \right| \begin{array}{l}
 s\text{-й рядок} \\
 k\text{-й рядок}
 \end{array} \quad (2.11)$$

рівні між собою, тобто

$$\begin{array}{l}
 k\text{-й рядок} \\
 s\text{-й рядок}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{cccc}
 a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots & a_{1m} \\
 a_{21} & a_{22} & \dots\dots\dots & a_{2m} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 b_1 & b_2 & \dots\dots\dots & b_m \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 b_1 & b_2 & \dots\dots\dots & b_m \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots & a_{mm}
 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc}
 a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots & a_{1m} \\
 a_{21} & a_{22} & \dots\dots\dots & a_{2m} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 b_1 & b_2 & \dots\dots\dots & b_m \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 b_1 & b_2 & \dots\dots\dots & b_m \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots & a_{mm}
 \end{array} \right| \begin{array}{l}
 s\text{-й рядок} \\
 k\text{-й рядок}
 \end{array} \cdot \quad (2.12)$$

Оскільки обидві рівності (2.9) та (2.12) мають місце, то це можливо лише коли кожен з визначників (2.10) та (2.11) дорівнює нулеві.

Таким чином, показано, що визначник, який має два однакових рядки, дорівнює нулеві.

**Властивість 5.** Якщо всі елементи одного з рядків визначника помножити на деяке число  $\lambda$ , то визначник помножиться на  $\lambda$ :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{k1} & \lambda a_{k2} & \dots & \lambda a_{km} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}. \quad (2.13)$$

Зважаючи на те, що не важливо, який саме рядок визначника помноживши на деяке число означає, що автоматично весь визначник помножиться на це число, справедливою буде рівність:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} =$$

$$= \dots = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{k1} & \lambda a_{k2} & \dots & \lambda a_{km} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} = \dots =$$

$$\begin{aligned}
&= \dots = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{s1} & \lambda a_{s2} & \dots & \lambda a_{sm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} = \dots = \\
&= \dots = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mm} \end{vmatrix} = \\
&= \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}. \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Або, рівності (2.14) ще можна трактувати такими рівностями:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{k1} & \lambda a_{k2} & \dots & \lambda a_{km} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{s1} & \lambda a_{s2} & \dots & \lambda a_{sm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}, \tag{2.15}$$

$$1 \leq k, s \leq m, k \neq s.$$

**Властивість 6.** Визначник, у якого є два пропорційні рядки, дорівнює нулю:

$$\begin{array}{l}
 k\text{-й рядок} \\
 s\text{-й рядок}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{cccc}
 a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots & a_{1m} \\
 a_{21} & a_{22} & \dots\dots\dots & a_{2m} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 b_1 & b_2 & \dots\dots\dots & b_m \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \lambda b_1 & \lambda b_2 & \dots\dots\dots & \lambda b_m \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots\dots & a_{mm}
 \end{array} \right| = 0. \quad (2.16)$$

В (2.16) число  $\lambda \in R$  є числом пропорційності:

$$a_{kj} = \lambda a_{sj}, \quad 1 \leq k, s \leq m, \quad k \neq s, \quad 1 \leq j \leq m, \quad (2.17)$$

тобто,

$$\begin{array}{l}
 k\text{-й рядок} \\
 s\text{-й рядок}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{cccc}
 a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots & a_{1m} \\
 a_{21} & a_{22} & \dots\dots\dots & a_{2m} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 a_{k1} = b_1 & a_{k2} = b_2 & \dots\dots\dots & a_{km} = b_m \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 a_{s1} = \lambda b_1 & a_{s2} = \lambda b_2 & \dots\dots\dots & a_{sm} = \lambda b_m \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots\dots & a_{mm}
 \end{array} \right| = 0. \quad (2.18)$$

**Властивість 7.** Якщо кожен елемент  $i$ -го рядка визначника є сумою двох доданків:

$$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq m, \quad (2.17)$$

то визначник дорівнює сумі двох визначників, в яких всі рядки, крім  $i$ -го рядка, такі самі, як і в даного визначника, а  $i$ -й рядок складається у першому визначнику з елементів  $b_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq m$ , а в другому визначнику – з елементів  $c_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq m$ :

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \dots & a_{(i-1)m} \\
b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \dots & b_{im} + c_{im} \\
a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \dots & a_{(i+1)m} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm}
\end{vmatrix} =
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \dots & a_{(i-1)m} \\
b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{im} \\
a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \dots & a_{(i+1)m} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm}
\end{vmatrix} +
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \dots & a_{(i-1)m} \\
c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{im} \\
a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \dots & a_{(i+1)m} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm}
\end{vmatrix}, \quad (2.18)$$

$1 \leq i, j \leq m$ .

**Властивість 8.** Якщо один з рядків визначника є лінійною комбінацією інших його рядків, то визначник дорівнює нулю.

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sm} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \dots & a_{(i-1)m} \\
a_{i1} = \alpha_1 \cdot a_{s1} + \beta_1 \cdot a_{k1} & a_{i2} = \alpha_2 \cdot a_{s2} + \beta_2 \cdot a_{k2} & \dots & a_{im} = \alpha_m \cdot a_{sm} + \beta_m \cdot a_{km} \\
a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \dots & a_{(i+1)m} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm}
\end{vmatrix} = 0. \quad (2.19)$$

Ватро нагадати поняття лінійної комбінації рядків:

**Означення 2.2.** Рядок  $a_i, 1 \leq i \leq m$ , матриці  $A$  (визначника  $\det A$ ) є лінійною комбінацією рядків  $a_i = k_1 a_{s_1} + k_2 a_{s_2} + \dots + k_p a_{s_p}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq p \leq m$ , де  $k_1, k_2, \dots, k_p, 1 \leq p \leq m$ , – деякі числа.

**Властивість 9.** Якщо до одного з рядків визначника додамо інший його рядок, помножений на деяке число  $\lambda$ , то визначник не зміниться.

Властивість 9 можна записати таким чином:

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\
 a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sm} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \dots & a_{(i-1)m} \\
 a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \\
 a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \dots & a_{(i+1)m} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm}
 \end{vmatrix} =
 \begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\
 a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sm} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \dots & a_{(i-1)m} \\
 a_{i1} = a_{s1} + \lambda \cdot a_{k1} & a_{i2} = a_{s2} + \lambda \cdot a_{k2} & \dots & a_{im} = a_{sm} + \lambda \cdot a_{km} \\
 a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \dots & a_{(i+1)m} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm}
 \end{vmatrix}. \tag{2.20}$$



$\bar{x}$  – вектор невідомих в системі (3.1);

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

$\bar{b}$  – вектор, що складається з вільних членів системи (3.1).

Систему лінійних рівнянь (3.1) також можна записати у вигляді матрично-векторного рівняння:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Зважаючи на позначення (3.2), (3.3), (3.4), матрично-векторне рівняння (3.5) можна записати у вигляді:

$$A\bar{x} = \bar{b}. \quad (3.6)$$

Метод Крамера розв'язання систем лінійних рівнянь застосовується у випадку квадратних систем лінійних рівнянь.

Щоб розв'язати систему лінійних рівнянь (3.6), розглянемо метод Крамера, який також має назву формули Крамера.

Має місце теорема.

**Теорема 3.1.** (теорема *Крамера*). Нехай

$$A\bar{x} = \bar{b} \quad (3.7)$$

квадратна система і

$$\det A \neq 0. \quad (3.8)$$



визначник  $\Delta_1$  утворений в результаті заміни в визначнику (3.12) матриці  $A$  першого стовпчика стовпчиком вільних членів і має вигляд:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1i-1} & a_{1i} & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2i-1} & a_{2i} & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{ni-1} & a_{ni} & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

аналогічним чином утворено визначник  $\Delta_2$ , тобто, в результаті заміни другого стовпця в визначнику (3.12) стовпцем вільних членів:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1i-1} & a_{1i} & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2i-1} & a_{2i} & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{ni-1} & a_{ni} & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

Решта визначників  $\Delta_i$ ,  $i = 3, \dots, n-1$ , також утворюються аналогічно попереднім, і їх вигляд можна записати таким чином:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i-1} & b_i & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i-1} & b_{2i} & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni-1} & b_{ni} & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad i = 3, \dots, n-1,$$

останній,  $n$ -й визначник  $\Delta_n$ , утворений в результаті заміни  $n$ -го стовпчика визначника (3.12) матриці  $A$  стовпчиком вільних членів, і має вигляд:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i-1} & a_{1i} & a_{1i+1} & \dots & a_{1n-1} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i-1} & a_{2i} & a_{2i+1} & \dots & a_{2n-1} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni-1} & a_{ni} & a_{ni+1} & \dots & a_{nn-1} & b_n \end{vmatrix}. \quad (3.13)$$

Формула (3.13) задає визначник, утворений в результаті заміни в визначнику (3.12)  $i$ -го стовпця на стовпець вільних членів  $\bar{b}$ .

Наприклад, при  $n = 3$  квадратна система (3.10) набуває вигляду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \quad (3.14)$$

Відповідна матриця  $A$ , яка складається з коефіцієнтів при змінних системи (3.10) має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

визначник матриці  $A$ , вигляду (3.11), є таким:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (3.16)$$

$\Delta_i, i=1, 2, 3$ , визначник матриці, утворені з матриці  $A$  заміною її  $i$ -го стовпця на стовпець вільних членів  $\bar{b}$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}, \quad (3.17)$$

За умови, що визначник (3.16) матриці  $A$ , яка є матрицею коефіцієнтів при змінних лінійної системи (3.14), відмінний від нуля, система трьох лінійних рівнянь (3.8) має розв'язки:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\det A}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\det A}. \quad (3.18)$$

Запишемо систему лінійних рівнянь (3.2) для випадку  $n = 4$ :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4, \end{cases} \quad (3.19)$$

відповідна матриця  $A$ , яка складається з коефіцієнтів при змінних системи (3.19) має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

має визначник:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}. \quad (3.21)$$

Запишемо визначники  $\Delta_i, i = 1, 2, 3, 4$ , кожен з яких утворюється в результаті заміни у визначнику (3.21) матриці  $A$ , що має вигляд (3.20),  $i$ -го стовпця на стовпець вільних членів  $\bar{b}$ :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & b_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & b_4 & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} & b_4 \end{vmatrix}, \quad (3.22)$$

За умови, що визначник (3.21) матриці  $A$  вигляду (3.20), яка є матрицею коефіцієнтів при змінних лінійної системи (3.19), відмінний від нуля, тобто,  $\det A \neq 0$ , система чотирьох лінійних рівнянь (3.19) має розв'язки:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\det A}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\det A}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\det A}, x_4 = \frac{\Delta_4}{\det A}. \quad (3.23)$$

### § 3.2. Приклади застосування методу Крамера

Наведемо приклади розв'язання квадратних систем лінійних рівнянь методом Крамера. Нехай задано систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 3x_3 = 9, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 7, \\ x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -2. \end{cases} \quad (3.24)$$

**Приклад 3.1.** Розв'язати методом Крамера систему рівнянь (3.24).

**Розв'язання.** За теоремою 3.1. квадратна система (3.24) має розв'язок, якщо виконується умова (3.8), тобто, якщо її визначник (3.16) відмінний від нуля. Запишемо матрицю коефіцієнтів при змінних системи:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & -3 \end{pmatrix}, \text{ знайдемо значення визначника матриці } A, \text{ виконавши його}$$

розклад за першим рядком:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = \\ &= 5 \cdot (-1)^{1+1} \cdot (1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-5)) + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot (2 \cdot (-3) - 2 \cdot 1) + \\ &+ (-3) \cdot (-1)^{1+3} \cdot (2 \cdot (-5) - 1 \cdot 1) = 5 \cdot (-3 + 10) + (-6 - 2) - 3 \cdot (-10 - 1) = \\ &= 5 \cdot (-3 + 10) + (-6 - 2) - 3 \cdot (-10 - 1) = 35 - 8 + 33 = 60. \end{aligned}$$

$\det A = 60 \neq 0$ , отже, за теоремою 3.1. система (3.24) має єдиний розв'язок.

Застосовуючи формули (3.17), знайдемо значення визначників  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ . У визначнику матриці  $A$  замінимо перший стовпчик стовпчиком

вільних членів і отримаємо визначник  $\Delta_1$ : 
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & -1 & -3 \\ 7 & 1 & 2 \\ -2 & -5 & -3 \end{vmatrix}, \text{ обчислимо}$$

значення визначника  $\Delta_1$ , зробивши розклад цього визначника за другим рядком:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 9 & -1 & -3 \\ 7 & 1 & 2 \\ -2 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 9 & -1 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = \\ &= -7 \cdot (-1 \cdot (-3) - (-5) \cdot (-3)) + 1 \cdot (9 \cdot (-3) - (-2) \cdot (-3)) - 2 \cdot (9 \cdot (-5) - (-2) \cdot (-1)) = \\ &= -7 \cdot (3 - 15) + 1 \cdot (-27 - 6) - 2 \cdot (-45 - 2) = -7 \cdot (-12) - 33 - 2 \cdot (-47) = \end{aligned}$$

$$= 84 - 33 + 94 = 178 - 33 = 145,$$

Отже,  $\Delta_1 = 145$ .

Тепер в визначнику матриці  $A$  замінімо другий стовпчик

стовпчиком вільних членів і отримаємо визначник  $\Delta_2$ :  $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 9 & -3 \\ 2 & 7 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix};$

обчислимо значення визначника  $\Delta_2$ , провівши його розклад за третім рядком:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 5 & 9 & -3 \\ 2 & 7 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = \\ &= (9 \cdot 2 - 7 \cdot (-3)) + 2 \cdot (5 \cdot 2 - 2 \cdot (-3)) - 3 \cdot (5 \cdot 7 - 2 \cdot 9) = \\ &= 18 + 21 + 2 \cdot 16 - 3 \cdot 17 = 39 + 32 - 51 = 71 - 51 = 20, \end{aligned}$$

тобто,  $\Delta_2 = 20$ .

Замінивши в визначнику матриці  $A$  третій стовпчик стовпчиком вільних

членів, отримаємо визначник  $\Delta_3$ :  $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 9 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & -5 & -2 \end{vmatrix}.$

Обчислимо значення визначника  $\Delta_3$ , зробивши його розклад за першим стовпчиком:

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 5 & -1 & 9 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 9 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 9 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = \\ &= 5 \cdot (1 \cdot (-2) - 7 \cdot (-5)) - 2 \cdot ((-1) \cdot (-2) - (-5) \cdot 9) + (-1 \cdot 7 - 9 \cdot 1) = \\ &= 5 \cdot 33 - 2 \cdot 47 - 16 = 165 - 94 - 16 = 55, \end{aligned}$$

отже,  $\Delta_3 = 55$ .

Використовуючи формули (3.18), запишемо розв'язки квадратної системи лінійних рівнянь (3.24):

$$x_1 = \frac{145}{60} = \frac{29}{12}, \quad x_2 = \frac{20}{60} = \frac{4}{12}, \quad x_3 = \frac{55}{60} = \frac{11}{12}.$$

Таким чином, остаточно маємо єдиний розв'язок квадратної системи

$$\text{лінійних рівнянь (3.24) вигляду: } \begin{cases} x_1 = \frac{29}{12}, \\ x_2 = \frac{4}{12}, \\ x_3 = \frac{11}{12}. \end{cases}$$

Шляхом безпосередньої перевірки можна переконатися, що розв'язок системи знайдено вірно.

*зауважимо*, що при розв'язанні квадратних систем методом Крамера, визначник матриці коефіцієнтів при змінних можна обчислювати будь-яким способом обчислення визначників, тобто, від методу обчислення значень визначників розв'язок квадратної системи не залежить. Наприклад, визначник матриці  $A$ ,  $\det A$ , обчислено шляхом його розкладу за першим рядком, визначник  $\Delta_1$  обчислено шляхом його розкладу за другим рядком, визначник  $\Delta_2$  обчислено шляхом його розкладу за третім рядком; значення визначника  $\Delta_3$  знайдено в результаті його розкладу за першим стовпчиком.

**Теорема 3.2.** (Теорема *про існування ненульового розв'язку*). Нехай  $A$  – квадратна матриця,

$$A\bar{x} = \bar{0} \tag{3.25}$$

однорідна квадратна система лінійних рівнянь. **Тоді** рівносильні такі умови:

$$3.1) \quad \det A = 0, \tag{3.26}$$

3.2) система (3.25) має ненульовий розв'язок.

В залежності від значень визначника квадратної системи (3.1) можна визначити, якою буде система: сумісною чи несумісною, і, якщо квадратна система (3.1) сумісна, то з'ясувати, визначена вона чи невизначена. Тобто, справедливі такі випадки:

3.3) якщо  $\det A \neq 0$ , то квадратна система (3.1) є визначеною і має єдиний розв'язок;

3.4) якщо  $\det A = 0$  і існує таке  $i$ , для якого  $\Delta_i \neq 0$ , тоді квадратна система (3.1) не має розв'язків, тобто, несумісна;

3.5) якщо  $\det A = \Delta_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$ , то квадратна система (3.1) є невизначеною і має безліч розв'язків.

**Приклад 3.2.** Дослідити на сумісність квадратну систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 6, \\ 2x - y - z = 2, \\ 4x - 2y - 2z = 6. \end{cases} \quad (3.27)$$

У випадку, якщо квадратна система лінійних рівнянь (3.27) буде сумісною, дослідити, чи буде вона визначеною.

**Розв'язання.**

Щоб дослідити квадратну систему лінійних рівнянь (3.27) на сумісність, потрібно знайти значення визначника матриці, елементами якої є коефіцієнти при змінних. Запишемо матрицю  $A$ , елементами якої є коефіцієнти при

змінних системи (3.27):  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ . Запишемо і обчислимо визначник

матриці  $A$ :

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot (-1 \cdot (-2) - (-2) \cdot (-1)) + 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot (2 \cdot (-2) - 4 \cdot (-1)) + \\ &+ 2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot (2 \cdot (-2) - 4 \cdot (-1)) = 3 \cdot (2 - 2) - (-4 + 4) + 2 \cdot (-4 + 4) = 3 \cdot 0 - 0 + 2 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Як бачимо  $\det A = 0$ , тепер запишемо і обчислимо  $\Delta_1$ . Замінімо в визначнику матриці  $A$  його перший стовпчик стовпчиком вільних членів квадратної системи лінійних рівнянь (3.27):

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot (-1)^{2+1} \cdot (1 \cdot (-2) - (-2) \cdot 2) + (-1) \cdot (-1)^{2+2} \cdot (6 \cdot (-2) - 6 \cdot 2) + \\ &+ (-1) \cdot (-1) (6 \cdot (-2) - 6 \cdot 1) = \\ &= 2 \cdot (-1) \cdot (-2 + 4) - (-12 - 12) + (-12 - 6) = -2 \cdot 2 - (-24) + (-18) = -4 + 24 - 18 = 2, \end{aligned}$$

в результаті обчислень отримали, що  $\det A = 0$ ,  $\Delta_1 = 2$ , тобто, визначник, що складається з коефіцієнтів матриці при змінних, дорівнює нулю, а визначник, який утворений з визначника матриці  $A$  в результаті заміни першого стовпчика стовпчиком вільних членів системи (3.27), дорівнює двом, тобто відмінний від нуля. За умовою 3.4) це означає, що квадратна система (3.27) несумісна, оскільки  $\det A = 0$  і існує  $i = 1$ , для якого  $\Delta_i \neq 0$ .

**Зауважимо**, що далі обчислювати значення визначників  $\Delta_2$  та  $\Delta_3$  немає потреби, оскільки отримані значення визначників  $\det A = 0$  та  $\Delta_1$  показують згідно умови 3.4), що квадратна система лінійних рівнянь (3.27) несумісна.

В прикладі 3.2 обчислення визначника матриці  $A$  відбувалося шляхом розкладу його за першим рядком; обчислення визначника  $\Delta_1$  виконано за допомогою розкладу його за другим рядком.

**Приклад 3.3.** Дослідити на сумісність квадратну систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x + 4y + z = 0, \\ 2y + 3z = 1, \\ 3x - 5z = -2. \end{cases} \quad (3.28)$$

У випадку, якщо квадратна система лінійних рівнянь (3.28) буде сумісною, дослідити, чи буде вона визначеною.

**Розв'язання.** Квадратна система лінійних рівнянь (3.28) є сумісною, якщо для неї виконується умова (3.2). Щоб встановити, чи буде квадратна система лінійних рівнянь (3.28) сумісною, потрібно знайти значення визначника матриці, елементами якої є коефіцієнти при змінних системи (3.28). Потрібно записати цей визначник, але в другому рівнянні системи (3.28) відсутня

змінна  $x$  та коефіцієнт при цій змінній, а в третьому рівнянні відсутня змінна  $y$  і коефіцієнт при ній. Тому, виникає питання, якою буде матриця  $A$ , що складається з коефіцієнтів при змінних квадратної системи лінійних рівнянь (3.28). Але, оскільки  $0 \cdot x = 0$  та  $0 \cdot y = 0$ , то система рівнянь (3.28) рівносильна системі

$$\begin{cases} 3x + 4y + z = 0, \\ 0 \cdot x + 2y + 3z = 1, \\ 3x + 0 \cdot y - 5z = -2. \end{cases} \quad (3.29)$$

Як бачимо, в системі (3.28) є коефіцієнти при всіх змінних в другому та третьому рівняннях, отже, запишемо матрицю, що складається з коефіцієнтів при змінних в системі (3.28):

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Обчислимо визначник матриці (3.30).

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= 0 \cdot (-1) \cdot (4 \cdot (-5) - 0 \cdot 1) + 2 \cdot (3 \cdot (-5) - 3 \cdot 1) + 3 \cdot (-1)^{2+3} \cdot (3 \cdot 0 - 3 \cdot 4) = \\ &= 0 + 2 \cdot (-15 - 3) + 3 \cdot (-1) \cdot (0 - 12) = 2 \cdot (-18) - 3 \cdot (-12) = -36 + 36 = 0, \end{aligned}$$

отже, в результаті обчислень отримали, що  $\det A = 0$ . Варто зауважити, що при розкладі визначника матриці  $A$  за другим рядком можна було не розписувати ретельно перші доданок, який складається з трьох множників: першого елемента другого рядка, мінус одиниці в степені два плюс один та визначника другого порядку, утвореного з елементів визначника матриці  $A$ , після викреслення з нього другого рядка та першого стовпчика, оскільки одним з множників першого доданка є нуль.

Оскільки  $\det A = 0$ , то квадратна система лінійних рівнянь (3.28) визначеною не буде. Щоб встановити чи буде система сумісною, потрібно

знайти відповідні їй визначники  $\Delta_i, i = 1, 2, 3$ , які визначаються за формулами (3.11).

Використовуючи формули (3.11), запишемо визначник  $\Delta_1$  і знайдемо його значення:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -1(4 \cdot (-5) - 0 \cdot 1) + 2 \cdot (0 \cdot (-5) - 1 \cdot (-2)) - 3 \cdot (0 \cdot 0 - (-2) \cdot 4) = 20 + 4 - 24 = 0,\end{aligned}$$

визначник  $\Delta_1 = 0$ , тому, щоб з'ясувати, якою є квадратна система (3.28), потрібно ще обчислити визначники  $\Delta_2$  та  $\Delta_3$ , і якщо хоча б один з них не буде дорівнювати нулеві, то система (3.28) буде несумісною, а якщо вони обидва будуть дорівнювати нулеві, то система (3.28) буде невизначеною.

Використаємо формули (3.28) і запишемо визначник  $\Delta_2$ :

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + (-5) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (0 \cdot (-2) - 3 \cdot 1) + 3 \cdot (-1) \cdot (3 \cdot (-2) - 3 \cdot 0) + (-5) \cdot (3 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = \\ &= -3 - 3 \cdot (-6 - 0) - 5 \cdot 3 = -3 + 18 - 15 = 0,\end{aligned}$$

в результаті проведених обчислень шляхом розкладу визначника  $\Delta_2$  за третім стовпчиком, отримали його значення:  $\Delta_2 = 0$ . Залишилося знайти значення визначника  $\Delta_3$ .

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 3 \cdot (-1)^{3+1} \cdot (4 \cdot 1 - 2 \cdot 0) + 0 - 2 \cdot (3 \cdot 2 - 0 \cdot 4) = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 12 - 12 = 0.\end{aligned}$$

В результаті обчислень отримали, що значення визначника  $\Delta_3 = 0$ . В результаті обчислень отримали, що  $\det A = 0$  і не існує таке  $i, i = 1, 2, 3$ , для

якого  $\Delta_i \neq 0$ , тобто, за умовами 3.4) та 3.5) це означає, що система (3.28) сумісна. Оскільки в результат обчислень визначників отримали, що  $\det A = \Delta_i = 0, i = 1, 2, 3$ , то квадратна система (3.1) є невизначеною і має безліч розв'язків, які можна буде знайти, розв'язавши розглядувану систему методом Гауса, за допомогою методу Крамера можна лише встановити чи сумісна система і чи визначена. Отже, система (3.28) сумісна і невизначена.

### ***§ 3.3. Застосування визначника у методі оберненої матриці (або матричний метод) розв'язання систем лінійних рівнянь***

Матричний метод або метод оберненої матриці розв'язання систем лінійних рівнянь застосовується лише до квадратних систем рівнянь вигляду (3.1) у випадку, коли визначник, елементами якого є коефіцієнти при змінних рівнянь лінійної системи, відмінний від нуля. Суть матричного методу полягає в тому, що квадратну систему лінійних рівнянь записують у матрично- векторній формі (3.5) або (3.6) і розв'язують матрично-векторне рівняння, використовуючи теорію розв'язання матрично-векторних рівнянь.

Дійсно, якщо при розв'язанні квадратної системи лінійних рівнянь (3.1), у якої, визначник матриці, що складається з коефіцієнтів при змінних, не дорівнює нулеві, записати систему у матрично-векторній формі (3.6):

$A\bar{x} = \bar{b}$  і домножити зліва обидві частини розглядуваного рівняння на матрицю, обернену до матриці  $A$ , тобто, на  $A^{-1}$ :  $A^{-1} \cdot A\bar{x} = A^{-1} \cdot \bar{b}$ ,

То отримаємо:

$$\bar{x} = A^{-1} \cdot \bar{b}. \quad (3.31)$$

(3.31) є розв'язком матрично-векторного рівняння (3.6), а, отже, і квадратної системи лінійних рівнянь (3.1). Зауважимо, що розв'язок (3.31) є єдиним

розв'язком матрично-векторного рівняння (3.6), та, відповідно, і квадратної системи лінійних рівнянь (3.1).

З рівності (3.31) випливає, що для того, щоб знайти розв'язок квадратної системи (3.1), потрібно послідовно виконати дії:

4.1) знайти визначник матриці, що складається з коефіцієнтів при змінних, тобто,  $\det A$ ; якщо  $\det A = 0$ , то квадратну систему (3.1) не можливо розв'язати матричним методом, тому розглядаємо випадок, коли  $\det A \neq 0$ ;

4.2) обчислити  $A^{-1}$ ;

4.3) знайти добуток  $A^{-1} \cdot \bar{b}$ .

Пункти 4.1) – 4.3) складають схему розв'язання квадратних систем матричним методом.

Розглянемо приклад розв'язання квадратної системи рівнянь матричним методом.

**Приклад 3.4.** Систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 4x + y - 5z = -2; \\ 2x - 3y + 7z = 4; \\ 3x + y - 2z = 7, \end{cases} \quad (3.32)$$

розв'яжемо методом оберненої матриці.

**Розв'язання.**

Запишемо систему (3.32) у матрично-векторній формі:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 7 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

В (3.33) матриця  $A$  є такою:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 7 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Вектор, елементами якого є вільні члени, має вигляд:

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Згідно зазначеної схеми розв'язання систем методом оберненої матриці, спочатку потрібно знайти визначник матриці  $A$ , але, оскільки ми вже обчислювали визначник матриці  $A$  при розв'язанні цієї системи методом Крамера, то можемо скористатися отриманим результатом обчислень:  $\det A = -34 \neq 0$ . Отримане при обчисленнях значення визначника відмінне від нуля, це означає, що систему (3.32) можна розв'язати методом оберненої матриці. Тому, переходимо до наступного кроку розв'язання квадратної системи методом оберненої матриці, тобто, до кроку 4.2), згідно якого потрібно знайти матрицю, обернену до матриці  $A$ . Для знаходження матриці  $A^{-1}$ , оберненої до матриці  $A$  скористаємося формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

де  $A_{ij}, 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3$ , – алгебраїчні доповнення відповідних елементів  $a_{ij}, 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3$ , матриці  $A$ .

Знайдемо алгебраїчні доповнення  $A_{ij}, 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3$ , елементів  $a_{ij}, 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3$ , матриці  $A$ .

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-2) - 1 \cdot 7 = 6 - 7 = -1, \text{ отже } A_{11} = -1;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(2 \cdot (-2) - 3 \cdot 7) = -(-4 - 21) = -(-25) = 25, \text{ отже } A_{12} = 25;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-3) = 2 + 9 = 11, \text{ отже, } A_{13} = 11;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(1 \cdot (-2) - 1 \cdot (-5)) = -(-2 + 5) = -3, \text{ отже } A_{21} = -3;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-2) - 3 \cdot (-5) = -8 + 15 = 7, \text{ отже } A_{22} = 7;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(4 \cdot 1 - 3 \cdot 1) = -1, \text{ отже } A_{23} = -1;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - (-3) \cdot (-5) = 7 - 15 = -8, \text{ отже } A_{31} = -8;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -(4 \cdot 7 - 2 \cdot (-5)) = -(28 + 10) = -38, \text{ отже, } A_{32} = -38;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-3) - 2 \cdot 1 = -12 - 2 = -14, \text{ отже, } A_{33} = -14.$$

Значення визначника матриці  $A$  та обчислені алгебраїчні доповнення  $A_{ij}, 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3$ , підставимо в формулу (3.36) :

$$A^{-1} = \frac{1}{-34} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -8 \\ 25 & 7 & -38 \\ 11 & -1 & -14 \end{pmatrix},$$

Тобто,

$$A^{-1} = \frac{1}{34} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ -25 & -7 & 38 \\ -11 & 1 & 14 \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Тепер залишається виконати пункт 4.3) схеми розв'язання квадратних систем матричним методом, тобто, потрібно знайдену матрицю  $A^{-1}$  вигляду

(3.37) помножити на вектор  $\bar{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ , елементами якого є вільні члени:

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot \bar{b} &= \frac{1}{34} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ -25 & -7 & 38 \\ -11 & 1 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{34} \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 + 8 \cdot 7 \\ -25 \cdot (-2) + (-7) \cdot 4 + 38 \cdot 7 \\ -11 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 + 14 \cdot 7 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{34} \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 + 8 \cdot 7 \\ -25 \cdot (-2) + (-7) \cdot 4 + 38 \cdot 7 \\ -11 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 + 14 \cdot 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{34} \begin{pmatrix} -2 + 12 + 56 \\ 50 - 28 + 266 \\ 22 + 4 + 98 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{34} \begin{pmatrix} 66 \\ 288 \\ 124 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{34} \cdot 66 \\ \frac{1}{34} \cdot 288 \\ \frac{1}{34} \cdot 124 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{33}{17} \\ \frac{17}{144} \\ \frac{17}{62} \\ \frac{17}{17} \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Обчислення (3.38) показують, що вектор

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \frac{33}{17} \\ \frac{17}{144} \\ \frac{17}{62} \\ \frac{17}{17} \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

є розв'язком квадратної системи лінійних рівнянь (3.32). Але, можливо при обчисленні  $\bar{x}$  були здійснені помилки в розрахунках, тому, щоб з'ясувати, що ми вірно знайшли розв'язок системи (3.32), потрібно виконати перевірку, тобто, підставити отримані значення (3.39) в початкову систему (3.32).

### Завдання для самостійної роботи.

1) Обчислити значення визначників, провівши розклад за:

а) 1-м рядком; б) 2-м рядком; в) 3-м рядком; г) 1-м стовпчиком; д)

2-м стовпчиком; е) 3-м стовпчиком:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} \quad (\text{Відповідь: } -35). \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{Відповідь: } 1).$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{Відповідь: } -29). \quad \text{d) } \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -9 \end{vmatrix} \quad (\text{Відповідь: } 13).$$

$$\text{e) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad (\text{Відповідь: } -9). \quad \text{f) } \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & 6 \end{vmatrix} \quad (\text{Відповідь: } -80).$$

$$\text{g) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} \quad (\text{Відповідь: } 73). \quad \text{h) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} \quad (\text{Відповідь: } 0).$$

$$\text{i) } \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} \quad (\text{Відповідь: } 1). \quad \text{j) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} \quad (\text{Відповідь: } 45).$$

2) Знайти значення визначників, використовуючи властивості:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 102 & 2 & 6 \\ 101 & 1 & -1 \\ 99 & 3 & -2 \end{vmatrix} \quad (\text{Відповідь: } 1532). \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -6 & -12 \\ 5 & 7 & 14 \end{vmatrix} \quad (\text{Відповідь: } 0).$$

$$\text{в) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -100 & 140 & -180 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} \quad (\text{Відповідь: } -80). \quad \text{г) } \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 11 \end{vmatrix} \quad (\text{Відповідь: } 0).$$

$$\text{д) } \begin{vmatrix} -50 & 23 & 17 \\ 0 & 0 & 0 \\ 101 & -4 & 13 \end{vmatrix} \quad (\text{Відповідь: } 0). \quad \text{е) } \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -7 & 35 & -21 \\ 23 & 9 & 15 \end{vmatrix} \quad (\text{Відповідь: } 0).$$

3) Знайти мінори та алгебраїчні доповнення всіх елементів матриць:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (\text{Відповідь: } \begin{array}{lll} M_{11} = 3; & M_{21} = 21; & M_{31} = -1; \\ M_{12} = -12; & M_{22} = 13; & M_{32} = 4; \\ M_{13} = -2; & M_{23} = -14; & M_{33} = 33. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} A_{11} = 3; & A_{21} = -21; & A_{31} = -1; \\ A_{12} = 12; & A_{22} = 13; & A_{32} = -4; \\ A_{13} = -2; & A_{23} = 14; & A_{33} = 33. \end{array}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (\text{Відповідь: } \begin{array}{lll} M_{11} = -8; & M_{21} = 1; & M_{31} = 11; \\ M_{12} = 14; & M_{22} = 2; & M_{32} = -18; \\ M_{13} = 12; & M_{23} = 1; & M_{33} = -19. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} A_{11} = -8; & A_{21} = -1; & A_{31} = 11; \\ A_{12} = -14; & A_{22} = 2; & A_{32} = 18; \\ A_{13} = 12; & A_{23} = -1; & A_{33} = -19. \end{array}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad (\text{Відповідь: } \begin{array}{lll} M_{11} = -4; & M_{21} = -6; & M_{31} = -2; \\ M_{12} = -35; & M_{22} = -12; & M_{32} = 5; \\ M_{13} = -28; & M_{23} = -6; & M_{33} = 4. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} A_{11} = -4; & A_{21} = 6; & A_{31} = -2; \\ A_{12} = 35; & A_{22} = -12; & A_{32} = -5; \\ A_{13} = -28; & A_{23} = 6; & A_{33} = 4. \end{array}$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad (\text{Відповідь: } \begin{array}{lll} M_{11} = 8; & M_{21} = 4; & M_{31} = 4; \\ M_{12} = 8; & M_{22} = 1; & M_{32} = 3; \\ M_{13} = -8; & M_{23} = -2; & M_{33} = -6. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} A_{11} = 8; & A_{21} = -4; & A_{31} = 4; \\ A_{12} = -8; & A_{22} = 1; & A_{32} = -3; \\ A_{13} = -8; & A_{23} = 2; & A_{33} = -6. \end{array}$$

$$\text{д) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Відповідь: } \begin{array}{lll} M_{11} = 2; & M_{21} = 3; & M_{31} = -10; \\ M_{12} = 0; & M_{22} = 0; & M_{32} = -21; \\ M_{13} = -7; & M_{23} = 0; & M_{33} = -7. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} A_{11} = 2; & A_{21} = -3; & A_{31} = -10; \\ A_{12} = 0; & A_{22} = 0; & A_{32} = 21; \\ A_{13} = -7; & A_{23} = 0; & A_{33} = -7. \end{array}$$

4) Знайти обернену матрицю до заданої:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{(Відповідь: } \begin{pmatrix} 0,6 & -0,4 & 0,8 \\ 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ -0,1 & 0,4 & -0,3 \end{pmatrix} \text{)}.$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{(Відповідь: } \begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{)}.$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{(Відповідь: } \begin{pmatrix} 2/13 & 16/39 & -1/39 \\ -1/13 & 5/39 & 7/39 \\ 3/13 & -2/39 & 5/39 \end{pmatrix} \text{)}.$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(Відповідь: } \begin{pmatrix} -0,2 & 0 & 0,3 \\ 0,4 & 0 & -0,1 \\ 0,8 & 1 & -0,7 \end{pmatrix} \text{)}.$$

$$\text{д) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{(Відповідь: } \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & -4 \\ -1 & -2 & 7 \\ 1/2 & 1/2 & -2 \end{pmatrix} \text{)}.$$

$$\text{е) } \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{(Відповідь: } \begin{pmatrix} 5/12 & 1/3 & 1/24 \\ 1/6 & 1/3 & -1/12 \\ 5/6 & 2/3 & -5/12 \end{pmatrix} \text{)}.$$

$$\text{ж) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Відповідь: Матриця не має оберненої).

5) Розв'язити системи методом Крамера:

$$\text{а)} \begin{cases} x + 3y + 2z = 4 \\ 2x + 6y + z = 2 \\ 4x + 8y - z = 2 \end{cases} \quad (\text{Відповідь: } x = 3, y = -1, z = 2).$$

$$\text{б)} \begin{cases} x - y = -1 \\ x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases} \quad (\text{Відповідь: } x = -4, y = -3, z = 7).$$

$$\text{в)} \begin{cases} 3x - 4y + z = -8 \\ 2x + y - 8z = 23 \\ 5x - 3y - 2z = 5 \end{cases} \quad (\text{Відповідь: } x = 2, y = 3, z = -2).$$

$$\text{г)} \begin{cases} 4x - y + 2z = -9 \\ -3x + 2y - 3z = 5 \\ 5x + 7y + z = -6 \end{cases} \quad (\text{Відповідь: } x = -3, y = 1, z = 2).$$

$$\text{д)} \begin{cases} 2x + 4y - 5z = 24 \\ x - 2y + 3z = -11 \\ 4x - y - 2z = 5 \end{cases} \quad (\text{Відповідь: } x = 1, y = 3, z = -2).$$

$$\text{е)} \begin{cases} 3x - 4y + 5z = 0 \\ -2x + y - 3z = -3 \\ 4x - 3y + 3z = 1 \end{cases} \quad (\text{Відповідь: } x = 1, y = 2, z = 1).$$

$$\text{ж)} \begin{cases} 2x - y + 3z = 6 \\ 5x + 2y - 4z = -24 \\ -2x + y + 2z = 9 \end{cases} \quad (\text{Відповідь: } x = -2, y = -1, z = 3).$$

$$\text{з)} \begin{cases} 2x - 6y + 3z = -6 \\ 3x + y - 2z = 14 \\ -x + 5y + 2z = -2 \end{cases} \quad (\text{Відповідь: } x = 3, y = 1, z = -2).$$

$$\text{и)} \begin{cases} 3x - y - 2z = 11 \\ 5x - 2y + 4z = 3 \\ 2x + y - 3z = 14 \end{cases} \quad (\text{Відповідь: } x = 3, y = 2, z = -2).$$

## ЛІТЕРАТУРА

1. Вища математика: основні означення, приклади і задачі. За ред. Кулініча Г.Л. – К.: Либідь, 1992. – 288 с.
2. Вища математика: Підручник: У 2 кн. – 2-ге вид. За ред. Кулініча Г.Л. – К.: Либідь, 2003.
3. Вища математика. Підручник. За ред. Пономаренка В.С. – Харків: Фоліо, 2014. – 669 с.
4. Гординський Л.Д., Грисенко М.В., Кушніренко С.В. та ін. Методичні вказівки та контрольні завдання для самостійної роботи студентів з курсу “Вища математика” – К.: ВПЦ “Київський університет”, 2002. – 78 с.
5. Завало С. Т. Курс алгебри. – Київ: Вища школа, 1985. – 503 с.
6. Кушніренко С.В. Методична розробка з курсу “Основи вищої математики” для студентів ННЦ “Інститут біології та медицини” – К., 2019. – 257 с. Режим доступу:  
[http://www.mechmat.univ.kiev.ua/wpcontent/uploads/2019/10/metod\\_kushni\\_reno.pdf](http://www.mechmat.univ.kiev.ua/wpcontent/uploads/2019/10/metod_kushni_reno.pdf)
7. Керекеша П.В. Лекції і вправи з вищої математики. – Одеса: "Астроприт", 2003.